

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

7-дәріс. Фурье немесе айнымалыларды ажырату әдісі. Штурм-Лиувиль есебі. Меншікті сандар мен меншікті функциялардың қасиеттері. Стеклов теоремасы.

Дәрістің мақсаты – Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есепті Фурье немесе айнымалыларды ажырату әдісімен шешу.

Негізгі сұрақтар:

1. Фурье әдісінің негізгі идеясы
2. Штурм-Лиувиль есебі
3. Меншікті сандар мен меншікті функциялардың қасиеттері. Стеклов теоремасы

1 Кіріспе

Парциалдық дифференциалдық теңдеулерді шешудің негізгі әдістерінің бірі — **айнымалыларды ажырату** және **Фурье әдісі**. Бұл әдістер теңдеуді қарапайым бірөлшемді есебтерге келтіруге мүмкіндік береді.

2 Айнымалыларды ажырату әдісі

Айнымалыларды ажырату әдісі негізінен келесі тәсілге сүйенеді:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

мұндағы $X(x)$ тек x -ке, $T(t)$ тек t -ге тәуелді функция. Парциалдық теңдеуді осы түрге алмастыру арқылы теңдеуді екі бірөлшемді теңдеуге бөлуге болады. Мысалы, бірөлшемді толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

мұндағы λ — бөлгіш тұрақты.

Штурм-Лиувилль есебі — бұл екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге қойылатын арнайы шекаралық есептер тобы. Бұл есебтің шешімі меншікті сандар және меншікті функциялар арқылы сипатталады, олар парциалдық дифференциалдық теңдеулерді шешудің негізгі құралы болып табылады.

3 Штурм-Лиувилль теңдеуі

Жалпы форма:

$$-(p(x)X')' + q(x)X = \lambda r(x)X, \quad a < x < b, \quad (3.1)$$

мұндағы:

- $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ — берілген тегіс функциялар,
- $q(x)$ — берілген нақты функция,
- λ — белгісіз сан, **меншікті сан** (eigenvalue),
- $X(x)$ — **меншікті функция** (eigenfunction).

Шекаралық шарттар көбінесе былай беріледі:

$$\alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \quad (3.2)$$

мұндағы α_i, β_i нақты сандар және $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$.

4 Меншікті сандар мен меншікті функциялар

Штурм-Лиувилль есебінің негізгі қасиеттері:

1. Барлық меншікті сандар λ_n нақты және шексіз өсіп келетін қатар құрайды:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty.$$

2. Әрбір меншікті санға λ_n бір ғана меншікті функция $X_n(x)$ сәйкес келеді, тек тұрақты көбейткішпен ерекшеленеді.

3. Ортогоналдығы: егер $m \neq n$,

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx = 0.$$

4. Толықтық: кез келген квадратно интегралданатын функция $f(x)$ үшін

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b r(x)f(x)X_n(x)dx}{\int_a^b r(x)X_n^2(x)dx}.$$

5 Мысал: қарапайым Штурм-Лиувилль есебі

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5.1)$$

Дирихле шекаралық шарттар:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (5.2)$$

Мақсат: барлық меншікті сандар λ және меншікті функциялар $X(x)$ табу.

6 Жалпы шешім

1. $\lambda = 0$ жағдайы

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B.$$

Шекаралық шарттарды қолданамыз:

$$X(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0,$$

$$X(L) = AL = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Сондықтан $\lambda = 0$ тек нөлдік шешім береді. $\lambda = 0$ жарамсыз (тек нөлдік шешім).

2. $\lambda > 0$ жағдайы

Жалпы шешім:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Шекаралық шарт $X(0) = 0$:

$$A \cos(0) + B \sin(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Сондықтан:

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Екінші шекаралық шарт $X(L) = 0$:

$$B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Бұл үшін:

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

7 Меншікті сандар және меншікті функциялар

- Меншікті сандар:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Ортогоналдығы:

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

8 Мысал: қарапайым Штурм-Лиувилль есебі

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (8.1)$$

шекаралық шарттар:

$$X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \quad (8.2)$$

Мақсат: барлық меншікті сандар λ және меншікті функциялар $X(x)$ табу.

9 Жалпы шешім

1. $\lambda = 0$ жағдайы

Теңдеуді шешеміз:

$$X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ax + B.$$

Шекаралық шарттарды қолданамыз:

$$X'(0) = A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

Сондықтан:

$$X_0(x) = B = \text{тұрақты функция.}$$

- Меншікті сан: $\lambda_0 = 0$ - Меншікті функция: $X_0(x) = 1$ (нормалауға болады).

2. $\lambda > 0$ жағдайы

Жалпы шешім:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Шекаралық шарт $X'(0) = 0$:

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Сондықтан:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Екінші шекаралық шарт $X'(L) = 0$:

$$X'(L) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0.$$

Сондықтан:

$$\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} L = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

10 Меншікті сандар және меншікті функциялар

- Меншікті сандар:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Ортогоналдығы:

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

- Меншікті сандар: $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ - Меншікті функциялар: $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ - Функциялар ортогоналды және толық жүйе құрайды.

11 Қорытынды

- Штурм-Лиувиль есебі – екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылатын шекаралық есептер.
- Меншікті сандар мен меншікті функциялар теңдеудің шешімін Фурье қатары түрінде көрсетуге мүмкіндік береді.
- Ортоқондық және толықтық қасиеттері парциалдық теңдеулерді шешуде шешуші рөл атқарады.

12 Стеклов теоремасы

Стеклов теоремасы: Егер $\{X_n(x)\}$ — Штурм-Лиувиль есебінің меншікті функциялары жүйесі болса, онда кез келген квадратно интегралданатын функция $f(x)$ үшін:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_a^b r(x) X_n^2(x) dx},$$

мұндағы конвергенция L^2 -норм бойынша жүзеге асады. Бұл функцияларды толық Фурье қатары түрінде өрнектеуге мүмкіндік береді.

—

13 Қорытынды

- Айнымалыларды ажырату әдісі парциалдық теңдеуді бірөлшемді есебтерге бөлуге мүмкіндік береді.
- Штурм-Лиувиль есебі меншікті сандар мен меншікті функцияларды анықтайды.
- Меншікті функциялар ортогоналды және толық жүйе құрайды.

- Стеклов теоремасы бұл функцияларды Фурье қатары ретінде өрнектеуге мүмкіндік береді.

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 13
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 13
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 13
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 13
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 13
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 13
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 13
- [8] Бурбаки Н. Спектральная теория. М.: Мир, 1972. 13
- [9] Пирковский А.Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. Москва. 2010. 176 с. 13